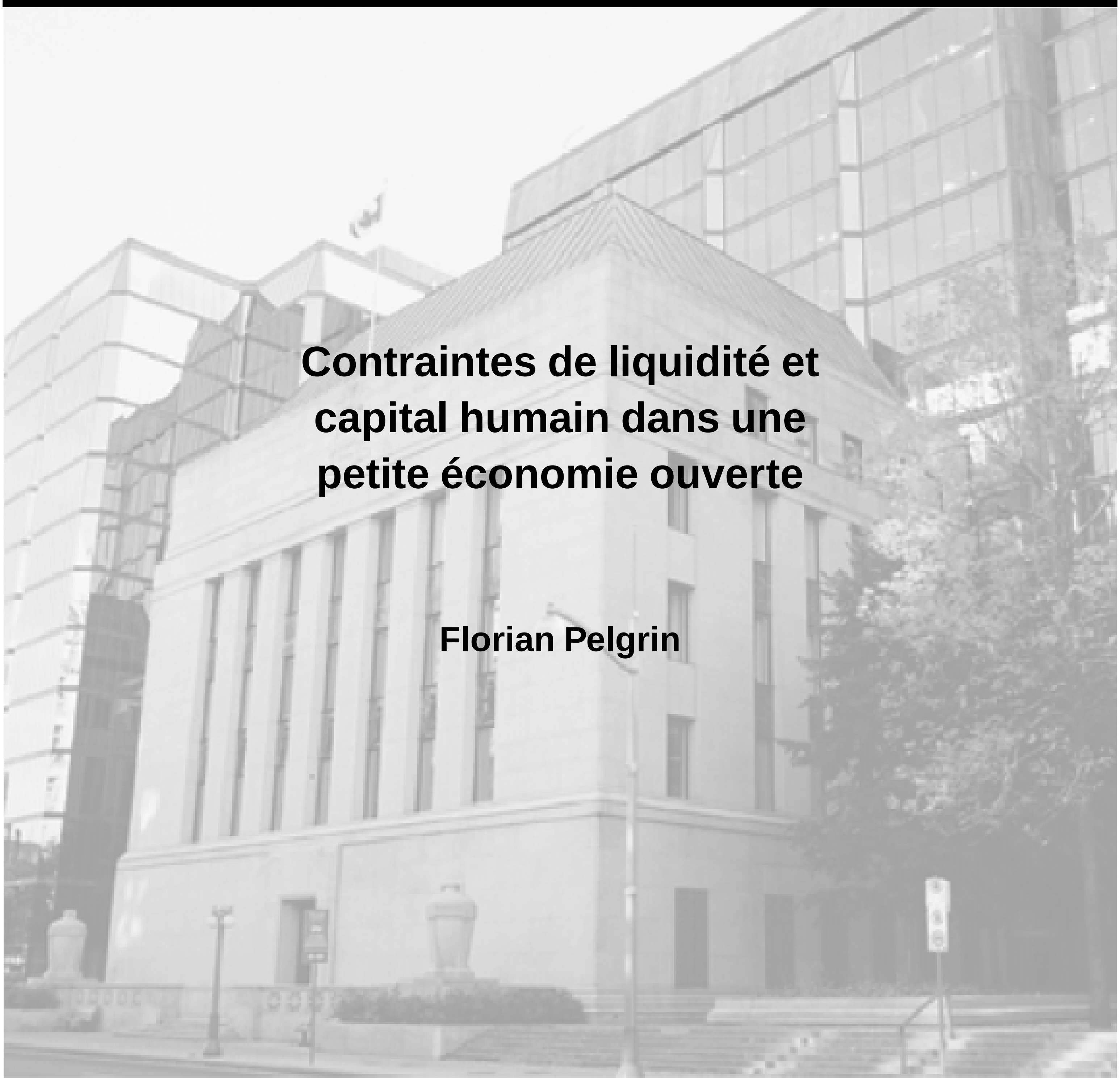
Banque du Canada Bank of Canada

Document de travail 2004-13 / Working Paper 2004-13



Contraintes de liquidité et capital humain dans une petite économie ouverte

Florian Pelgrin

Remerciements

L’auteur tient à remercier tout particulièrement MM. C. Calmès, A. D’Autume, B. Ventelou, J. P. Vidal et B. Wigniolle pour leurs commentaires et suggestions, ainsi que les participants au séminaire sur les modèles à générations imbriquées (Marseille, 2003) et au séminaire de l’Observatoire français de la conjoncture économique (Paris, 2003).

ISSN 1192-5434

Imprimé au Canada sur papier recyclé

Document de travail 2004-13 de la Banque du Canada

Avril 2004

Contraintes de liquidité et capital humain dans une petite économie ouverte

Florian Pelgrin

Banque du Canada, EUREQua, Université de Paris I
et
Observatoire français de la conjoncture économique
fpelgrin@banqueducanada.ca

Table des matières

Résumé

Dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées à deux périodes, l'introduction de contraintes de liquidité (restrictions du crédit) limite le développement économique si le seul facteur de croissance est le capital humain. En présence d'équilibres multiples, l'économie peut se retrouver dans une trappe à pauvreté où le taux de croissance de l'économie est faible et le niveau de l'éducation est peu élevé. Une politique de libéralisation financière peut alors améliorer la situation.

Classification JEL : I20, O40
Classification de la Banque : Modèles économiques

Abstract

In an overlapping-generations model that represents a small open economy, where agents live two periods, liquidity constraints lead to low economic development when the only accumulable factor is human capital. In the context of multiple equilibria, an underdevelopment trap can result in which the growth rate of the economy and the level of education are low. A financial liberalization policy may lead to improvements in such a situation.

JEL classification: I20, O40
Bank classification: Economic models

1. Introduction

Les études récentes sur les liens entre la croissance endogène et le développement financier (Levine, 2002; Wachtel, 2003) montrent que l'intermédiation financière (les marchés financiers ou l'intermédiation bancaire) affecte le niveau ainsi que l'allocation de l'investissement réel et le taux d'épargne (Pagano, 1993 et Levine, 1997). En particulier, les effets de substitution et de revenu associés à la hausse des rendements espérés exercent *a priori* un effet net indéterminé sur le taux d'épargne. En fait, une limite importante de ces modèles est que cet effet y est généralement considéré comme positif ou que le taux d'épargne y est constant. Dans cette perspective, toute politique de répression financière aboutit à des situations inefficientes au sens de Pareto. Cependant, cette conclusion est discutable si l'on s'intéresse à l'offre de crédit aux ménages plutôt qu'au financement par prêt bancaire ou par émission d'obligations privées (ou d'actions).

Ainsi, Japelli et Pagano (1994) montrent – dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées à trois périodes, où les agents "jeunes" privés de revenus salariaux empruntent pour financer leur consommation et remboursent à l'âge moyen les dettes contractées tout en épargnant pour leur retraite – que l'existence de contraintes de liquidité ou de crédit fait augmenter le taux d'épargne de l'économie. Dans un modèle de croissance exogène, la hausse du taux d'épargne se traduit alors par un effet de niveau sur l'état stationnaire et par un accroissement temporaire du taux de croissance de l'économie. Par conséquent, si les contraintes de crédit sont relâchées (libéralisation financière), le taux d'épargne diminue et exerce un effet négatif sur l'accumulation du capital et la croissance. Développant un modèle de croissance endogène à la Romer (1986), Japelli et Pagano (1994) montrent que les contraintes de crédit ont un effet positif sur le taux d'épargne. Cela implique une hausse du taux de croissance de l'économie.

Cependant, dans le cas d'une petite économie ouverte avec mobilité parfaite des capitaux, Japelli et Pagano (1994) remarquent que l'effet des contraintes d'emprunt est moins évident. En effet, le stock de capital ne dépend plus de l'épargne interne puisque les agents peuvent emprunter sur les marchés internationaux de capitaux (mobilité parfaite des capitaux). Les contraintes de liquidité ont alors un effet distortionnaire sur le profil de consommation, mais n'affectent pas l'accumulation du capital. Dans la même perspective, Aiyagari (1994) montre que l'épargne globale peut augmenter si la capacité d'emprunt des ménages est limitée. Les contraintes de crédit n'ont néanmoins aucun effet si l'horizon temporel de l'agent est infini. Devereux et Smith (1994) étudient l'offre d'assurance des ménages et démontrent que l'épargne augmente si les consommateurs ne peuvent pas se prémunir contre les risques de dotation ou de rendement. Japelli et Pagano (1999) s'intéressent aux effets des contraintes de crédit sur le bien-être. Ainsi, si l'économie est dynamiquement inefficiente lorsque les marchés des capitaux sont parfaits et si la croissance est exogène, la répression financière, c'est-à-dire l'instauration de contraintes d'emprunt, a un effet négatif sur le bien-être des agents. *A contrario*, si l'économie est dynamiquement efficiente, il existe un degré optimal de répression financière, c.-à-d. un arbitrage entre la distorsion des choix intertemporels et les gains liés à l'augmentation du capital physique. Dans le cas d'une petite économie ouverte, il n'est pas optimal de mettre en place une politique de répression financière, puisque les contraintes de crédit n'ont pas d'impact sur l'accumulation du capital. Cependant, si toutes les économies pratiquent la libéralisation financière, l'épargne diminue et la mobilité des capitaux conduit à une valeur d'équilibre du stock de capital inefficiente.

Finalement, les contraintes de crédit exercent toujours un effet positif sur le bien-être des agents lorsqu'on considère un modèle avec croissance endogène (Japelli et Pagano, 1999). Biederman (2001) examine aussi les effets des contraintes d'emprunt sur le bien-être dans un modèle à générations imbriquées où coexistent deux types d'agents : les prêteurs et les emprunteurs. Lorsque la contrainte de liquidité est relachée, l'effet net sur le bien-être des générations présentes et futures à l'état stationnaire pour chaque type d'agent est mixte. En effet, la réduction des contraintes d'emprunt fait augmenter, d'une part, l'ensemble des consommations possibles des agents (dans le cas des emprunteurs) et elle induit, d'autre part, une baisse de l'accumulation du capital physique par le biais d'une réduction de l'épargne individuelle. Finalement, cette relation positive entre le taux d'épargne et les contraintes de crédit est confirmée empiriquement par Japelli et Pagano (1994) pour un échantillon comprenant des pays de l'OCDE et des pays en voie de développement.

Cependant, l'existence d'un effet positif des contraintes de crédit peut être critiquée si l'on introduit un deuxième facteur accumulable (capital humain) ou de l'altruisme dans les modèles précédents. Ainsi, comme le montrent De Gregorio et Guidotti (1995) et De Gregorio (1996), même si les contraintes de crédit incitent à épargner davantage, elles peuvent également exercer un effet nuisible en contraignant par exemple les possibilités des ménages pendant la période d'éducation. Cette idée est déjà présente dans les travaux de Becker (1975), Gersovitz (1988) et Hubbard et Judd (1986). En effet, si les agents s'endettent pour augmenter leur niveau de qualification, alors l'effet sur la croissance est ambigu. Christou (2001) étudie les conséquences, sous la forme de différences dans la capacité d'emprunt, de l' hétérogénéité des agents sur le processus d' accumulation du capital humain. Dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées à trois périodes, l'auteur montre que les agents investissent d'autant moins en éducation que la part de la population contrainte s'accroît. L'idée selon laquelle les imperfections des marchés de capitaux contraignent l'accumulation du capital humain a fait l'objet de nombreuses études empiriques. Ainsi, Carneiro et Heckman (2002) montrent que l'accès au crédit contraint le niveau d'éducation. Lang (1993) et Card (1995, 2001) suggèrent que les contraintes de crédit sont importantes dans les décisions d'éducation aux États-Unis. Cependant, Cameron et Taber (2000) ne trouvent pas de soutien empirique à cette hypothèse.

La présente étude s'intéresse aux rôles des imperfections des marchés financiers lorsqu'il existe des restrictions sur le marché du crédit. Contrairement à Japelli et Pagano (1994, 1999), nous montrons que les contraintes de liquidité ont un effet négatif sur la croissance si le seul facteur accumulable est le capital humain. Par ailleurs, si l'on suppose l'existence d'externalités liées à l'accumulation du capital humain, l'économie peut être caractérisée par des équilibres multiples. Par conséquent, toute politique de libéralisation financière peut conduire à une amélioration du bien-être des agents en termes de croissance et de capital humain. Ces résultats viennent ainsi nuancer les conclusions de Japelli et Pagano (1994, 1999) et montrent l'importance des sources de la croissance.

Pour ce faire, nous considérons un modèle à générations imbriquées à deux périodes où la technologie de production est linéaire et dépend uniquement de l'accumulation du capital humain. Les agents jeunes reçoivent une dotation initiale en capital humain héritée de leurs ascendants (accumulation non intentionnelle de capital humain) et peuvent allouer leur unité de temps disponible entre la formation en capital humain et une activité productive (accumulation intentionnelle). En seconde période, chaque agent offre inélastiquement une unité de travail et reçoit un salaire qui dépend de son niveau de capital humain accumulé. Dès lors, si les individus sont limités par leur revenu futur pour financer la consommation courante, il en résulte un taux de croissance de l'économie plus faible par rapport à celui qui prévaudrait dans une économie avec un marché du crédit parfait. Ainsi, un degré élevé de répression financière peut inciter les agents à ne pas investir dans leur formation. Par conséquent, le taux de croissance de l'économie atteint son niveau le plus bas alors même qu'un relâchement faible de ces contraintes conduirait à une amélioration de la croissance. Cette inefficience des contraintes de crédit peut s'accroître si l'on suppose qu'il existe une externalité positive associée au temps moyen consacré à l'éducation par les jeunes de la génération t. L'économie peut alors se trouver dans une situation de trappe à pauvreté.

L'article est organisé de la façon suivante. La section 2 présente le modèle à générations imbriquées avec intermédiation financière et sans restriction sur le marché du crédit. La section 3 étudie l'impact de contraintes de liquidité sur le taux de croissance de l'économie. La section 4 analyse les implications de l'existence d'une externalité sur le capital humain. Quelques remarques de conclusion sont présentées à la section 5.

2. Le modèle

Nous considérons un modèle à générations imbriquées dans lequel il existe un continuum d'agents identiques dont la taille est normalisée à 1. Nous étudions le cas d'une petite économie ouverte (Japelli et Pagano, 1994), le taux d'intérêt est donc donné. Les agents ne sont soumis à aucune contrainte, à l'exception de la condition usuelle de solvabilité. Cette contrainte impose ici que le taux de croissance de la dette des ménages n'excède pas le taux d'intérêt mondial. En d'autres termes, on suppose dans un premier temps que les agents peuvent prêter ou emprunter librement sur le marché du crédit, défini ici comme l'accès au financement sur les marchés internationaux.

Au niveau agrégé, on suppose que l'économie produit un seul bien non stockable en utilisant une technologie de production linéaire nécessitant du capital physique et du capital humain :

$$Y_t = F(K_t, H_t) \text{ avec } K_t = \widetilde{K}, \tag{1}$$

soit après normalisation, $Y_t = H_t$.[1]
Ainsi, le taux de croissance du produit est égal au taux de croissance du stock de capital humain. Le salaire réel exprimé en unités du bien de consommation est donc proportionnel à H_t. Le taux d'intérêt réel est exogène (hypothèse d'une petite économie ouverte), $R_{t+1} \equiv R = 1 + r$.

Les agents vivent deux périodes et disposent à chaque période d'une unité de temps de travail. Nous supposons que le rendement de l'éducation baisse au cours du cycle de vie d'un agent (Becker, 1964). L'accumulation du capital humain est donc décrite par une équation intergénérationnelle qui définit la dotation initiale en capital humain de chaque génération, et par une équation intragénérationnelle qui décrit la dynamique d'accumulation du capital humain durant le cycle de vie d'un agent[2]. Ainsi, en première période, les individus héritent du capital humain accumulé par leurs parents. L'équation intergénérationnelle s'écrit alors :

$$h_{1,t}^i \equiv h_{1,t} = H_{2,t-1}, \tag{2}$$

où $H_{2,t-1} = \int_0^1 h_{2,t-1}^i di$, $h_{1,t}^i$ est la dotation initiale en capital humain d'un agent "jeune" de la génération t et $h_{2,t-1}^i$ est le capital humain accumulé par l'individu i de la génération t-1 en seconde période de vie.

Il s'ensuit par symétrie que :

$$h_{1,t} = h_{2,t-1}. \tag{3}$$

[1] Afin de simplifier l'analyse, on suppose $\widetilde{K} = 1$. Cette fonction de production peut s'interpréter en considérant le cas d'une économie pauvre où le secteur primaire est relativement très important et concentré au niveau des ménages. Le producteur-consommateur utilise alors une technologie où le seul facteur accumulable est le travail qualifié, le facteur non accumulable $(\widetilde{K})$ pouvant être la dotation initiale du facteur terre.

[2] Pour une revue de la littérature, voir D'Autume et Michel (1994).

La contrainte de première période s'écrit donc :

$$c^i_{1,t^\cdot} + s^i_t = (1 - v^i_t) h^i_{1,t} w_t. \tag{4}$$

Par ailleurs, un individu né en t avec une qualification initiale $h_{1,t}$ arbitre entre le temps v_t qu'il désire consacrer à l'éducation et le temps $1 - v_t$ consacré à une activité de production de façon à maximiser l'utilité intertemporelle de sa consommation. L'investissement en capital humain consiste donc en une éducation formelle qui permet de lisser le profil intertemporel de la consommation.
L'équation intragénérationnelle d'accumulation du capital humain s'écrit alors :

$$h_{2,t} = G(v_t) h_{1,t}. \tag{5}$$

On suppose (hypothèse 1) que la fonction G vérifie les propriétés suivantes pour $0 \leq v_t \leq 1$:

- $G(0) \geqslant 1$
- $G'(.) \geqslant 0$
- $G''(.) \leq 0.$

Ainsi, la première condition implique que le taux de croissance du stock de capital humain est au moins positif, c.-à-d. qu'il n' y a pas de dépréciation des connaissances. Par ailleurs, la seconde condition signifie que le niveau de compétences et de connaissances est d'autant plus élévé en seconde période que les agents passent de temps à se former lorsqu'ils sont jeunes, c.-à-d. que le rendement marginal de l'éducation est positif. Enfin, la troisième condition suppose que l'efficacité marginale par unité de capital humain est décroissante[3], c.-à-d. que la fonction G est concave (De Gregorio, 1996; Christou, 2001).

En seconde période, l'agent offre inélastiquement une unité de travail et reçoit un salaire qui dépend de son niveau accumulé de connaissances.

La contrainte de seconde période s'écrit donc :

$$c^i_{1,t^\cdot} = R s^i_t + w_{t+1}. \tag{6}$$

[3] On peut supposer $\lim_{v \to 0} G'(v) = \infty$, c-à-d. lorsque la part consacrée à la formation décroît, le produit marginal tend vers l'infini. Dès lors, les agents choisissent toujours un montant positif de temps consacré à l'éducation.

L'hypothèse de linéarité de la fonction de production implique $w_{t+1} = h^i_{2,t} w_t = G(v_t) h^i_{1,t} w_t$ et son revenu actualisé est donc :

$$\frac{h^i_{2,t} w_t}{R} + w_t(1 - v^i_t) h^i_{1,t} \text{ soit encore } \frac{G(v^i_t) h^i_{1,t} w_t}{R} + w_t(1 - v^i_t) h^i_{1,t} \ . \tag{7}$$

L'objectif du consommateur est de maximiser son utilité intertemporelle sous la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$Max_{\left\{c^i_{1,t}, c^i_{2,t}, v^i_t\right\}} \left\{\gamma \log(c^i_{1,t}) + (1-\gamma)\log(c^i_{2,t})\right\}$$

$$\begin{aligned} s.c. \quad c^i_{1,t} + c^i_{2,t}/R &= w_t(1 - v^i_t) h^i_{1,t} + w_t G(v^i_t) h^i_{1,t}/R. \\ 0 &\leqslant v^i_t \leqslant 1 \end{aligned} \tag{8}$$

La résolution de ce programme de maximisation par le lagrangien généralisé (conditions de Kuhn et Tucker) donne les valeurs optimales des consommations et du temps consacré à la formation $\{(c_{1,t}), (c_{2,t}), (v_t)\}$. En l'absence de frictions sur le marché du crédit et de coûts directs associés à l'éducation ou à la formation en capital humain, chaque agent maximise son revenu actualisé ou, de manière équivalente, sa richesse humaine en tenant compte du profil choisi pour la consommation. Dans cette perspective, le programme du consommateur peut se résoudre en deux étapes : (i) détermination du temps de formation optimal puis (ii) sélection du sentier de consommation optimal. Le temps consacré à l'éducation se déduit donc du programme de maximisation suivant :

$$Max_{v^i_t}\{1 - v^i_t + G(v^i_t)/R\}. \tag{9}$$

La valeur optimale, intérieure et unique v^* vérifie[4] :

[4]Si $G'(0) < R$ (respectivement $G'(1) > R$), il existe une solution en coin $h^* = 0$ (respectivement $h^* = 1$). Il est à noter qu'une spécification linéaire de la fonction G introduit alors un continuum d'équilibres. Dans ce dernier cas, on supposera que les agents ne peuvent se coordonner et choisissent une des deux solutions en coin suivant la valeur des paramètres (cf. supra). La résolution est décrite à l'Annexe 1.

$$v^* = \ G'^{-1}(R) \qquad \text{si } G'(1) \leq R \leq G'(0). \tag{10}$$

En effet, chaque unité de temps consacrée à l'éducation se traduit par un coût d'opportunité égal à $w_t h_{1,t}$ et à un bénéfice marginal actualisé $w_t h_{1,t} G'(v_t)/R$. Dès lors, la condition de non-arbitrage s'écrit $G'(v_t) = R$. Si le bénéfice marginal actualisé est inférieur au coût d'opportunité, l'individu préferera réduire son temps de formation et ainsi accroître son bénéfice marginal et inversement. La condition (6) peut aussi s'interpréter en comparant le taux d'intérêt autarcique donné par $G'(v)$ et le taux d'intérêt mondial R. Si le taux d'intérêt autarcique est inférieur au taux d'intérêt mondial, il est préférable pour un agent jeune, compte tenu du coût de remboursement en seconde période, de moins investir en éducation et donc de moins emprunter. Inversement, si le taux d'intérêt autarcique est supérieur au taux d'intérêt mondial R, l'agent peut investir en éducation et financer sa consommation courante par un emprunt sur le marché du crédit. Lorsque les deux taux d'intérêt sont égaux, il n'existe plus de possibilité d'arbitrage.

Finalement, les individus sont identiques, ils choisissent donc les mêmes valeurs optimales[5] pour les consommations de première et de seconde période, et le temps consacré à la formation. Le taux de croissance du stock de capital humain s'écrit alors[6] :

$$g_H = \frac{H_{2,t} - H_{1,t}}{H_{1,t}} = G(v^*) - 1 = G(G'^{-1}(R)) - 1 \qquad \text{si} \qquad G'(1) \leq R \leq G'(0).$$

Ce taux de croissance est unique et ne dépend que de l'arbitrage entre le coût d'opportunité et le bénéfice marginal de l'éducation. Par ailleurs, l'équilibre sur le marché du bien de consommation et l' hypothèse de linéarité de la fonction de production assurent que la consommation, le produit, le stock de capital humain et les salaires croissent au même taux. L'économie n'admet pas de dynamique transitoire et croît perpétuellement au taux $g \equiv g_Y = g_H = g_C = g_w$.

[5] On négligera par la suite l'indice i.

[6] Si $G'(0) < R$ (respectivement $G'(1) > R$), le taux de croissance de l'économie est donné par $G(G'^{-1}(0)) - 1$ (respectivement $G(G'^{-1}(1)) - 1$).

3. L'introduction de contraintes de crédit

Puisque les agents ne sont pas contraints sur le marché du crédit, ils choisissent leur investissement en éducation indépendamment du profil choisi pour la consommation. En présence d'une contrainte de liquidité, ce choix n'est plus possible. Nous supposons maintenant que les ménages ne peuvent au mieux emprunter sur les marchés internationaux de capitaux qu'une fraction exogène[7] $\lambda - 1$ ($\lambda \geq 1$) de leur revenu courant pour financer leur consommation en première période (De Gregorio, 1996). Ainsi modélisée, la contrainte de liquidité influence directement la capacité de l'agent à financer sa consommation courante et non son éducation (absence de coûts directs). Cette hypothèse se justifie par l'observation dans la pratique d'une forte correlation positive entre le montant des crédits et le revenu courant (ainsi que les revenus passés), les revenus futurs anticipés affectant dans une moindre mesure l'allocation des crédits.
La contrainte de liquidité s'écrit donc :

$$c_{1,t} \leq \lambda w_t (1 - v_t) h_{1,t}. \tag{11}$$

Deux cas extrêmes peuvent être considérés. D'une part, si $\lambda = 1$, aucune possibilité d'emprunt n'est possible sur le marché du crédit. D'autre part, si $\lambda \to \infty$, on retrouve les résultats (équation 10) de la section précédente (marché du crédit parfait). Finalement, les restrictions sur le marché du crédit sont d'autant plus importantes que λ est proche de 1.

À la période t, l'agent " jeune" choisit la durée de formation en prenant en compte son désir de lisser sa consommation. Si un individu ne peut pas emprunter en contrepartie de ses revenus futurs, il ne souhaitera pas allouer tout son temps disponible en première période à la formation. En effet, si $v = 1$, l'individu souhaite consommer, mais il ne dispose pas de revenu de première période. Ainsi, cette solution n'est plus optimale même si elle maximise sa richesse humaine.

La résolution du programme du consommateur peut se résumer par la proposition suivante[8] :

[7] On ne modélise pas explicitement les frictions sur le marché du crédit entre prêteurs et emprunteurs (voir Bencivenga et Smith, 1991, 1993). Cette contrainte peut être le résultat de la mise en oeuvre d'une régulation de l'État (Jappelli et Pagano, 1994, 1999).

[8] La preuve est donnée à l'Annexe 2.

PROPOSITION 1 : Supposons que l'hypothèse 1 soit vérifiée,

– si $\frac{G(v)}{1-v} \leqslant \frac{\lambda-\gamma}{\gamma}R$, le consommateur n'est pas contraint sur le marché du crédit;

– si $\frac{G(v)}{1-v} > \frac{\lambda-\gamma}{\gamma}R$, le consommateur est contraint sur le marché du crédit.

La fonction objectif du consommateur s'écrit donc:

$$F(v) = \begin{array}{ll} F_1(v) & \text{si} \quad \frac{G(v)}{1-v} \leqslant \frac{\lambda-\gamma}{\gamma}R \\ F_2(v) & \text{si} \quad \frac{G(v)}{1-v} > \frac{\lambda-\gamma}{\gamma}R \end{array}$$

où $F_1(v) = c^{ste} + \log((1-v) + \frac{G(v)}{R})$, $F_2(v) = c^{ste} + \gamma \log(1-v_t) + (1-\gamma)\log(G(v) - (\lambda-1)R(1-v))$.

Nous nous intéressons ici au cas où la contrainte de liquidité est saturée. La consommation de première période est alors $c_{1,t} = \lambda w_t(1-v_t)h_{1,t}$ et l'épargne nette est définie par $s_t = w_t(1-v_t)h_{1,t}(1-\lambda)$.[9] On suppose que $G'(0) > R$ (hypothèse 2).

Le programme du consommateur[10] s'écrit alors :

$$Max_{c_{2,t},v_t} \quad \{\gamma \log(\lambda w_t(1-v_t)h_{1,t}) + (1-\gamma)\log(c_{2,t})\} \tag{12}$$

s. c.

$$\begin{array}{rcl} c_{2,t}/R & = & w_t h_{1,t} G(v_t)/R - s_t \\ 0 & \leq & v_t \end{array}$$

soit encore :

$$Max_{v_t} \quad \{\gamma \log(1-v) + (1-\gamma)\log(G(v) - (\lambda-1)R(1-v))\}. \tag{13}$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$(\lambda-1)R(1-v) + (1-\gamma)G'(v)(1-v) = \gamma G(v). \tag{14}$$

[9]Si l'agent est contraint, les consommations de première période et de seconde période sont définies par : $c_{1,t} = \lambda w_t h_{1,t}(1-v^*)$ et $c_{2,t} = w_t h_{1,t}\left[(1-\lambda)R(1-v^*) + G(v^*)\right]$.

[10]La résolution complète du programme est détaillée en annexe 3.

S'il existe une solution optimale $v^* > 0$, celle-ci vérifie la relation suivante : $\Psi_1(v^*) = \Psi_2(v^*)$ où $\Psi_1(v^*) = (\lambda - 1)R(1 - v^*) + (1 - \gamma)G'(v^*)(1 - v^*)$ et $\Psi_2(v^*) = \gamma G(v^*)$.

L'étude de la condition (12) permet de montrer que[11] :

PROPOSITION 2 : Sous les hypothèses 1 et 2 :

– si $\lambda \geqslant 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right)$, il existe un unique $v^* \geqslant 0$;

– si $\lambda < 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right)$, $v^* = 0$.

La valeur optimale v^* dépend positivement du taux d'intérêt réel ainsi que du paramètre de la contrainte de liquidité et négativement de la préférence pour le présent[12]. Une baisse de λ induit une diminution de l'ensemble des consommations possibles. L'individu consacre alors moins de temps à son éducation. Il s'ensuit que les taux de croissance du stock de capital humain et du produit sont d'autant plus faibles que λ est proche de 1. Une hausse du taux d'intérêt réel R implique une baisse de la consommation de seconde période. Pour lisser son sentier de consommation, l'agent consacre plus de temps à l'éducation et transfère intertemporellement un supplément de revenu pour compenser la perte initiale de consommation. Un accroissement du taux de préférence pour le présent incite l'agent à consommer plus aujourd'hui. Pour ce faire, il réduit le temps consacré à sa formation et augmente ainsi son revenu salarial. *In fine*, en présence d'une contrainte de crédit, l'individu consacre moins de temps à son éducation.

L'étude des conditions de la proposition 2 permet de déduire[13] :

PROPOSITION 3 : Supposons $\lambda \geqslant 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right)$ et que les hypothèses 1 et 2 soient vérifiées :

- si $\frac{G'(0)}{G(0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, il existe toujours un unique $v^* > 0$

- si $\frac{G'(0)}{G(0)} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}$,il existe une valeur critique $\underline{\lambda}$, telle que $\forall \lambda \in [1;\underline{\lambda}], v^* = 0$ et $\forall \lambda > \underline{\lambda}$, $v^* > 0$.

On peut interpréter la proposition 3 en remarquant d'une part que $\frac{G'(0)}{G(0)} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\partial h_{2,t}}{\partial v_t} \frac{1}{h_{2,t}}\right)$ est l'efficacité marginale par unité de capital humain à la

[11] La preuve est donnée à l'Annexe 4.

[12] Voir calculs à l'Annexe 4.

[13] Voir démonstration à l'Annexe 5.

période $t+1$ lorsque l'individu ne consacre pas de temps à sa formation, et d'autre part que $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ est l'inverse du taux de préférence pour le présent (le taux d'actualisation). Si le rendement marginal de l'éducation (lorque $v = 0$) est supérieur au taux d'actualisation, l'individu investira toujours en capital humain indépendamment de la contrainte de crédit et donc de l'importance de la répression financière. Inversement, si le rendement marginal de l'éducation est inférieur au taux d'actualisation, deux cas peuvent se présenter. Si l'accès au crédit est trop restrictif, c'est-à-dire $\lambda <\underline{\lambda}$, l'individu ne préferera pas consacrer de temps à sa formation. En revanche, au delà d'un certain seuil, c'est-à-dire $\lambda >\underline{\lambda}$, une partie de son temps disponible en première période est allouée à la formation en capital humain. Dans cette situation, un relâchement de la contrainte de crédit conduit l'agent à accroître le stock de capital humain et donc le taux de croissance de l'économie. Le paramètre $\underline{\lambda}$ peut donc s'interpréter comme le degré minimal de libéralisation financière nécessaire.

Le taux de croissance de l'économie est donc donné par :

$$\begin{aligned} g &= G(v^*) - 1 \quad \text{si} \quad \lambda \geqslant 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right) \\ g &= G(0) - 1 \quad \text{si} \quad \lambda < 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

où v^* vérifie la proposition 2.

Ce taux de croissance dépend de l'importance de la contrainte de liquidité. Le Graphique 1 (page 24) reprend les résultats de cette section lorsque $\lambda \geqslant 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right)$.

Pour illustrer les résultats précédents, on considère deux applications. Dans le premier cas (économie 1), la fonction G est linéaire et s'écrit sous la forme $G(v) = 1+\alpha+\beta v$, où α est un paramètre exogène strictement positif (représentant la tendance exogène de la productivité) et β, le rendement marginal du stock de capital humain. Dans le second cas (économie 2), la fonction G est décrite par $G(v) = 1 + \alpha + v^{\beta}$.

S'il n'existe pas de contrainte de liquidité, le taux de croissance perpétuel de l'économie est :

- Pour l'économie 1

$$g = \alpha \quad \text{si} \quad \beta \leq R$$
$$g = \alpha + \beta \quad \text{si} \quad \beta > R$$

- Pour l'économie 2

$$g = \alpha + \left(\frac{\beta}{R}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \quad \text{si} \quad \beta \leq R.$$

Dans le premier cas, les agents choisissent les solutions en coin $v^* = 0$ ou $v^* = 1$ (voir note de bas de page 6). Dans le second cas, il existe une solution intérieure $v^* = \left(\frac{\beta}{R}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

En supposant que la contrainte est toujours saturée, sous les conditions de la proposition 2, en présence d'une contrainte de liquidité, le niveau d'éducation optimale est définie par :

- Pour l'économie 1

$$v^* = 0 \quad \text{si} \quad \tfrac{\beta}{1+\alpha} \leq \tfrac{\gamma}{1-\gamma}$$
$$v^* = 1 - \tfrac{\gamma(1+\alpha+\beta)}{(\lambda-1)R+\beta} \quad \text{si} \quad \tfrac{\beta}{1+\alpha} > \tfrac{\gamma}{1-\gamma}$$

- Pour l'économie 2

$$v^* > 0 \ / \ \Psi_1(v^*) = \Psi_2(v^*)$$

avec $\Psi_1(v^*) = (\lambda-1)R(1-v^*)+(1-\gamma)\beta v^{*\beta-1}(1-v^*)$ et $\Psi_1(v^*) = \gamma(1+\alpha+v^{\beta})$.

Il est à noter que la condition $\frac{G'(0)}{G(0)} \geqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}$ est toujours vérifiée, de sorte qu'il existe un unique v^* strictement positif (voir Graphique 2, page 24).

En présence de contraintes de liquidité, le taux de croissance de l'économie est donné par :

- Pour l'économie 1

$$\begin{aligned} g_Y &= G(0) - 1 = \alpha \quad \text{si} \quad \frac{\beta}{1+\alpha} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \\ g_Y &= G(v^*) - 1 = \alpha + \beta h^* \quad \text{si} \quad \frac{\beta}{1+\alpha} > \frac{\gamma}{1-\gamma} \end{aligned}$$

- Pour l'économie 2

$$g_Y = \alpha + (h^*)^\beta.$$

Les restrictions sur le marché du crédit réduisent donc le taux de croissance de l'économie 1 ou 2 par rapport à la situation d'un marché du crédit parfait.

4. Contraintes de crédit et externalités

La section précédente a permis de montrer que l'existence de contraintes de liquidité restreint la formation en capital humain et induit une baisse du taux de croissance de l'économie. En présence d'équilibres multiples, les frictions sur le marché du crédit peuvent conduire à l'existence d'une trappe à pauvreté où l'économie croît à un taux faible et où la part consacrée à l'éducation est peu élevée. Pour le montrer, nous introduisons une externalité dans l'accumulation du capital humain : le temps consacré à la formation est d'autant plus élevé que la durée moyenne d'éducation est importante (Lucas,1988, Azariadis et Drazen, 1990). L'équation intragénérationnelle d'accumulation du capital humain s'écrit alors :

$$h^i_{2,t} = G(\int_0^1 v^i_t di, v^i_t) h^i_{1,t}.$$

Par la suite, nous nous intéressons uniquement aux équilibres symétriques et l'équation précédente se réécrit :

$$h_{2,t} = G(\overline{v}_t, v_t) h_{1,t}. \tag{16}$$

On suppose (hypothèse 3) que la fonction G vérifie les propriétés suivantes pour $0 \leq v_t \leq 1$:

- $G_2'(0,0) < R$ et $G_2'(1,1) > R$
- $G_2'(\overline{v}_t, v_t) > 0$ et $G_{22}''(\overline{v}_t, v_t) < 0$
- $G_{21}''(\overline{v}_t, v_t) \geqslant 0$.

Ainsi, si peu d'agents se forment en première période, l'efficacité marginale de l'accumulation du capital humain est inférieure au taux d'intérêt exogène et par conséquent aucun agent ne désirera acquérir de capital humain. Au contraire, si beaucoup d'agents jeunes consacrent du temps à l'éducation, l'efficacité marginale du capital humain est supérieure au taux d'intérêt; il est alors optimal de choisir $v = 1$ et les agents jeunes seront incités à se former. Il existe donc deux solutions en coin (0,0) et (1,1).

Par ailleurs, le rendement privé de l'éducation est positif et décroissant. Finalement, le temps moyen consacré à se former a un effet positif (externalité) sur le rendement privé du capital humain. Dès lors, les agents ne tiennent pas compte de cette externalité et choisissent leur profil de consommation et le temps alloué à l'éducation en prenant $\overline{v}_t$ comme donné.

Le programme de l'agent s'écrit donc[14]:

$$Max_{v_t}\{1 - v_t + G(\overline{v}_t, v_t)/R\}. \tag{17}$$

La solution individuelle vérifie :

$$G_2'(\overline{v}_t, v) = R \quad \text{si} \quad G_2'(\overline{v}_t, 1) \leq R \leq G_2'(\overline{v}_t, 0).$$

Un équilibre est donc défini par $\overline{v} = \widehat{v}$ tel que $G'(\widehat{v}, \widehat{v}) = R$. On en déduit[15]:

PROPOSITION 4 : Supposons que l'hypothèse 3 soit vérifiée :
Si $G_{21}''(v,v) + G_{22}''(v,v) > 0$, il existe un unique équilibre.

Par ailleurs, il est à noter que les hypothèses $G_{22}''(\overline{v}_t, v_t) < 0$ et $G_{21}''(\overline{v}_t, v_t) \geqslant 0$

[14] On s'intéresse ici à l'existence d'une ou de plusieurs solutions intérieures. Pour la résolution complète, voir Annexe 7.

[15] Voir Annexe 7 pour la démonstration.

impliquent qu'il existe une complémentarité stratégique entre v et $\overline{v}$[16].

Comme précédemment, en présence d'imperfections sur le marché du crédit, la fonction à maximiser peut se réécrire sous la forme suivante :

$$X(v,\overline{v}) = \begin{array}{cc} \log(1-v) + \frac{G(v,\overline{v})}{R} & \text{si} \quad \frac{G(v,\overline{v})}{1-v} \leqslant \frac{\lambda-\gamma}{\gamma} \\ \gamma \log(1-v) + (1-\gamma)\log\left[(1-\lambda)R(1-v) + G(v,\overline{v})\right] & \text{si} \quad \frac{G(v,\overline{v})}{1-v} > \frac{\lambda-\gamma}{\gamma} \end{array}.$$

En présence d'une contrainte de crédit, la solution (1,1) n'est plus un équilibre (voir section 3). Le programme de l'agent est alors donné par :

$$Max_v \; X(v,\overline{v}) \quad \text{sachant} \quad \frac{G(v,\overline{v})}{1-v} > \frac{\lambda-\gamma}{\gamma} \tag{18}$$

ce qui équivaut à (cf. *supra*) :

$$Max_v \quad \{\gamma \log(1-v) + (1-\gamma)\log(G(\overline{v},v) - (\lambda-1)R(1-v))\}. \tag{19}$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$(\lambda-1)R(1-v) + (1-\gamma)G_2'(\overline{v},v)(1-v) = \gamma G(\overline{v},v). \tag{20}$$

Un équilibre est donc défini par $\overline{v} = \widehat{v}$ tel que

$$(\lambda-1)R(1-\widehat{v}) + (1-\gamma)G_2'(\widehat{v},\widehat{v})(1-\widehat{v}) = \gamma G(\widehat{v},\widehat{v}).$$

On déduit de l'étude de cette égalité[17] :

PROPOSITION 5 : Supposons que l'hypothèse 3 soit vérifiée :
- (0, 0) est toujours un équilibre.
- Si $\frac{G_2'(0,0)}{G(0,0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, il existe une valeur critique $\underline{\lambda}$, tel que $\forall\lambda \in [1;\underline{\lambda}]$, le seul équilibre est (0, 0) et $\forall\lambda > \underline{\lambda}$, il existe au moins deux équilibres.

On retrouve ainsi les résultats de la section précédente. En particulier, il peut exister un degré minimal de libéralisation financière. Par ailleurs, l'existence

[16] La démonstration est immédiate en différenciant la condition du premier ordre et en vérifiant la condition du second ordre.
[17] Voir Annexe 8.

d'un équilibre intérieur dépend des conditions imposées sur les dérivées partielles secondes et troisièmes de la fonction G. Différents cas de figure peuvent être envisagés. Ils sont illustrés aux Graphiques 3, 4 et 5 des pages 25 et 26.

Dans le cas du Graphique 3, le seul équilibre est (0,0). Peu d'agents investissent en capital humain, le rendement marginal de l'éducation est alors faible et les agents ne sont donc pas incités à poursuivre la formation en capital humain. Dans le cas du Graphique 4, il existe deux équilibres : (i) un équilibre "bas", où le temps consacré à l'éducation est faible et (ii) un équilibre "haut", où les agents allouent des ressources à la formation en capital humain. Toute politique de répression financière conduit à diminuer le temps consacré à l'éducation et donc le taux de croissance de l'économie. Il existe alors, pour le paramètre λ de la contrainte de crédit, une valeur critique qui conduit les agents à ne plus investir en capital humain. *A contrario*, une politique de libéralisation financière accroît le temps consacré à la formation et donc le capital humain.

Dans le cas du Graphique 5, il existe trois équilibres: $(0,0), (\widehat{v}_1, \widehat{v}_1)$ et $(\widehat{v}_2, \widehat{v}_2)$. Les équilibres $(0,0)$ et $(\widehat{v}_2, \widehat{v}_2)$ sont stables et $(\widehat{v}_1, \widehat{v}_1)$ est instable. En effet, si l'individu choisit un niveau $\widehat{v} > \widehat{v}_1$, alors l'externalité positive associée au temps moyen consacré à l'éducation incite les agents à choisir l'équilibre "haut" $(\widehat{v}_2, \widehat{v}_2)$ et inversement. L'économie peut donc être prise dans une trappe à pauvreté, où le temps consacré à l'éducation et le taux de croissance de l'économie sont faibles. L'existence d'une trappe à pauvreté peut être mise en évidence en supposant que la fonction G dépend d'un effet de seuil où l'on tient compte du temps moyen consacré à l'éducation par la génération t-1. Dès lors, les contraintes de crédit réduisent non seulement le temps consacré à l'éducation mais peuvent aussi conduire à la stagnation de l'économie.

On considère finalement une application, qui est une extension naturelle de l'économie 1 considérée dans la section précédente. On suppose alors que la fonction $G(.,.)$ s'écrit sous la forme, $G(v, \overline{v}) = 1 + \alpha + \beta \left(\int_0^1 v_t^i di \right) v = 1 + \alpha + \beta\left(\overline{v}\right) v$, et que $\beta(0) < R$ et $\beta(1) > R$.

En l'absence de contrainte de liquidité, la solution optimale, v^{**}, est donnée par: $v^{**} = 1$ si $\beta(\widehat{v}) > R$ et $v^{**} = 0$ si $\beta(\widehat{v}) < R$. Un équilibre est donc défini par $\widehat{v} = v^{**}$. Il existe donc deux équilibres : un équilibre "haut" où le taux de croissance de l'économie ainsi que le niveau de l'éducation sont élevés et un équilibre "bas" où le taux de croissance de l'économie et le niveau de l'éducation sont faibles. En présence de contraintes de liquidité, notons v^* la solution individuelle (voir section 3), il est immédiat de montrer que la solution v^{**} est alors définie par : $v^{**} = v^*$ si $\beta(v^*) > R$ et $v^{**} = 0$ sinon. L'équilibre est alors tel que $\widehat{v} = v^{**}$. Differents cas peuvent alors se présenter suivant la valeur des paramètres.

5. Conclusion

L'introduction de contraintes de liquidité a un impact négatif sur le niveau du capital humain et le taux de croissance dans la mesure où le seul facteur accumulable est le capital humain. Un degré excessif de répression financière incite les agents à se former peu, voire à ne plus allouer de ressources à la formation en capital humain. En présence d'une externalité associée au temps moyen consacré à l'éducation, la répression financière peut enfermer l'économie dans une trappe à pauvreté et conduire l'économie à une phase de stagnation. Le développement économique n'est alors possible que si l'État favorise une politique de libéralisation financière.

Les résultats présentés dépendent cependant de l'hypothèse de linéarité de la fonction de production, dont le seul facteur accumulable est le capital humain. En effet, toute réduction du temps consacré à la formation (par l'introduction d'une contrainte de crédit) réduit le stock de capital humain et donc la dotation initiale en capital humain héritée par la génération suivante ainsi que le taux de croissance de l'économie. Cette hypothèse peut se justifier dans le cas d'une petite économie ouverte "pauvre".

Dans cette perspective, le modèle peut se réinterpréter en supposant que chaque agent a le choix entre deux technologies. La première a une productivité élevée, mais nécessite plus de temps pour donner des bénéfices, alors que la deuxième technologie (traditionnelle) est moins productive, mais est rentable instantanément. De plus, afin d'adopter la première technologie, l'agent doit emprunter sur le marché du crédit pour financer sa consommation courante dans la mesure où cette technologie nécessite une phase d'apprentissage par rapport à la technologie traditionnelle. La variable v peut alors s'interpréter comme la fraction des ressources consacrée à la technologie la plus productive. Ainsi, si les ménages n'ont pas accès au marché du crédit ou sont fortement contraints par la politique de répression financière, ils sont incités à utiliser la technologie la moins productive. Le taux de croissance de l'économie est alors plus faible que celui obtenu lorsque les agents adoptent partiellement la nouvelle technologie. Les imperfections du marché du crédit peuvent ainsi conduire à l'adoption des technologies les moins productives si l'économie est dans une situation de trappe à pauvreté.

Bibliographie

Aiyagari, R. S. (1994). "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving", *Quarterly Journal of Economics*, vol.109, No. 3, p. 659-84.

Azariadis, C. (1993). *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, Oxford University Press.

Azariadis, C. et A. Drazen (1990). "Thresholds Externalities in Economic Development", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 105, No. 2, p. 501-526.

Becker, G. S. (1975). *Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*, University of Chicago Press, Chicago.

Bencivenga, V. R. et B. D. Smith (1993). "Somes Consequences of Credit Rationing in an Endogenous Growth Model", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 17.

Biederman, D.K. (2001). "Borrowing Constraints and Individual Welfare in a Neoclassical Growth Model", *Journal of Macroeconomics*, vol. 22, No. 4, p. 645-670.

Cameron, S. et C. Taber (2000). "Borrowing Constraints and the Returns to Schooling", document de travail non publié, National Bureau of Economic Research.

Carneiro, P. et J. Heckman (2002). "The Evidence on Credit Constraints in Post-Secondary School", *Economic Journal*, vol. 112, p. 705-734.

Card, D. (1995). "Earnings, Schooling and Ability Revisited", *Research in Labor Economics*, vol. 14, p. 23-48.

Card, D. (2001). "Estimating the Return to Schooling: Progress on some Persistent Econometric Problems", *Econometrica*, vol. 69, No. 5, p. 1127-1160.

Christou, C. (2001). " Differential Borrowing Constraints and Investment in Human Capital", *Journal of Macroeconomics*, vol. 23, No. 2, p.277-295.

De Gregorio, J. (1996). " Borrowing constraints, human capital accumulation and growth", *Journal of Monetary Economics*, vol. 37, No. 1, p. 79-104.

Devereux, M.B. et G.W. Smith (1994). "International Risk Sharing and Economic Growth" , *International Economic Review*, vol. 35, No. 3, p. 535-50.

Greenwood, J. et B. Jovanovic (1990). "Financial development, growth and the Distribution of Income", *Journal of Political Economy*, vol. 98, No. 5, p. 1076-1107.

Japelli, T. et M.Pagano (1994). "Savings, Growth, and Liquidity Constraints", *The Quaterly Journal of economics*, vol. 109, No. 1, p. 83-109

Japelli, T. et M. Pagano (1999). "The welfare effects of liquidity constraints", *Oxford Economic Papers*, vol. 51, p. 410-430.

King, R.G. and R. Levine (1993). "Finance, entrepreneurship, and Growth: theory and Evidence", *Journal of Monetary Economics*, vol. 32, No. 3, p. 717-738.

Lang, K. (1993). "Ability Bias, Discount Rate Bias, and the Return to Education", document de travail non publié, Boston University.

Levine, R. (1991). "Stock Markets, Growth and Tax Policy", *The Journal of Finance*, vol. 46, No. 4, p. 1445-1465.

Levine, R. (1992). "Financial Structure and Economic Development", World Bank Working Paper, n. 849.

Levine, R. (2002). "More Finance, More Growth?", The Federal Reserve Bank of St-Louis Review, vol. 85, No. 4.

Lucas, R. (1988). "On the Mechanisms of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, No. 1, p. 3-42.

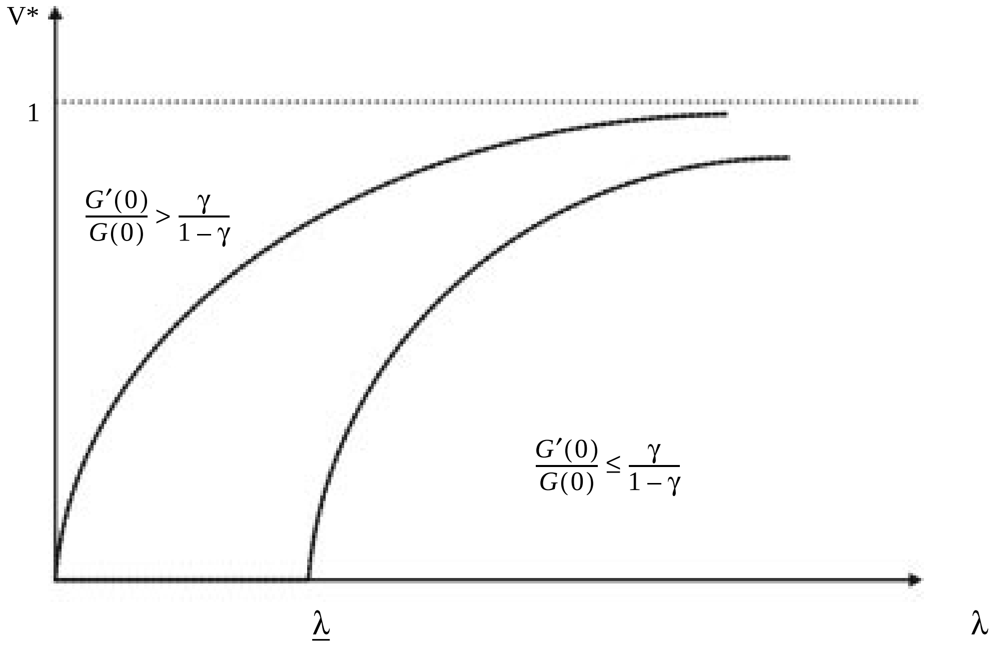
Obstfeld, M. (1994). " Risk-Taking, Global Diversification and Growth", *American Economic Review*, vol. 84, p. 1310-1329.

Pagano, M. (1993). "Financial Markets and Growth : An overview", *European Economic Review*, vol. 37, No. $2-3$, p. 613-22.

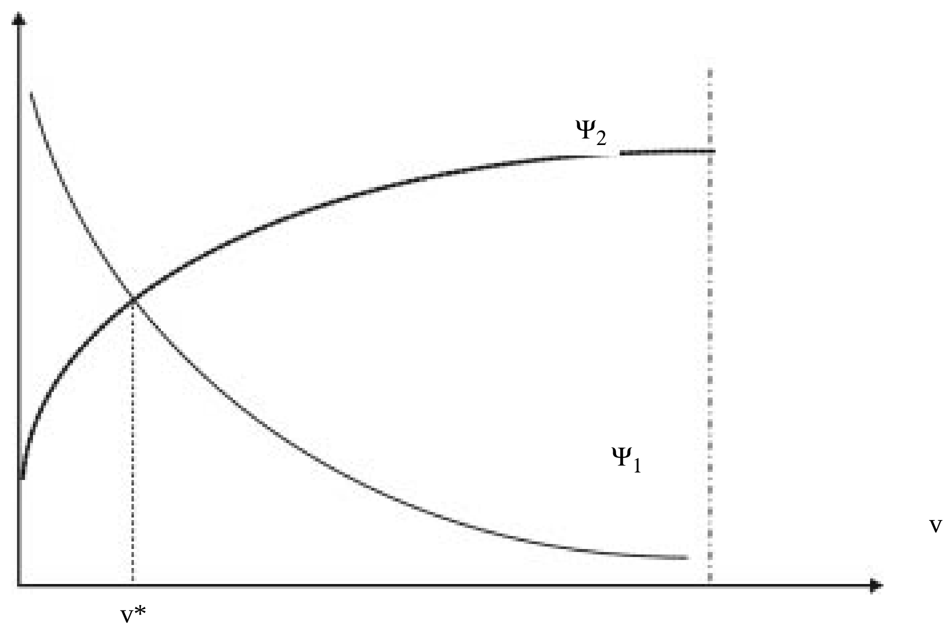
Saint-Paul, G. (1992). "Technological Choice, Financial Markets and Economic Development", *European Economic Review*, vol. 36, No. 4, p. 763-78.

Wachtel, P. (2003). "How much do we really know about growth and finance?", *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, vol. 88, No. 1, p. 33-47.

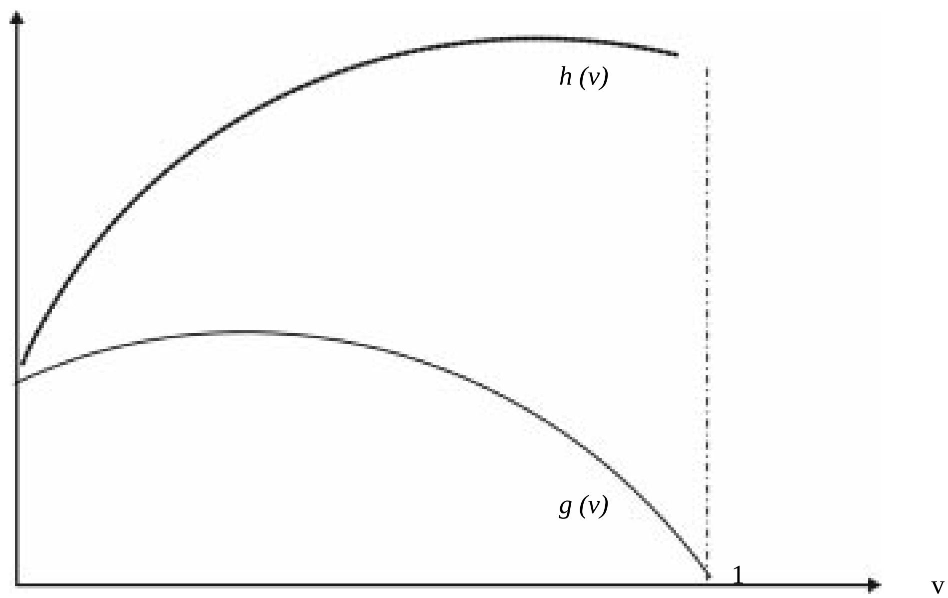
Graphique 1: Existence d'une solution intérieure



Graphique 2: Détermination de v*

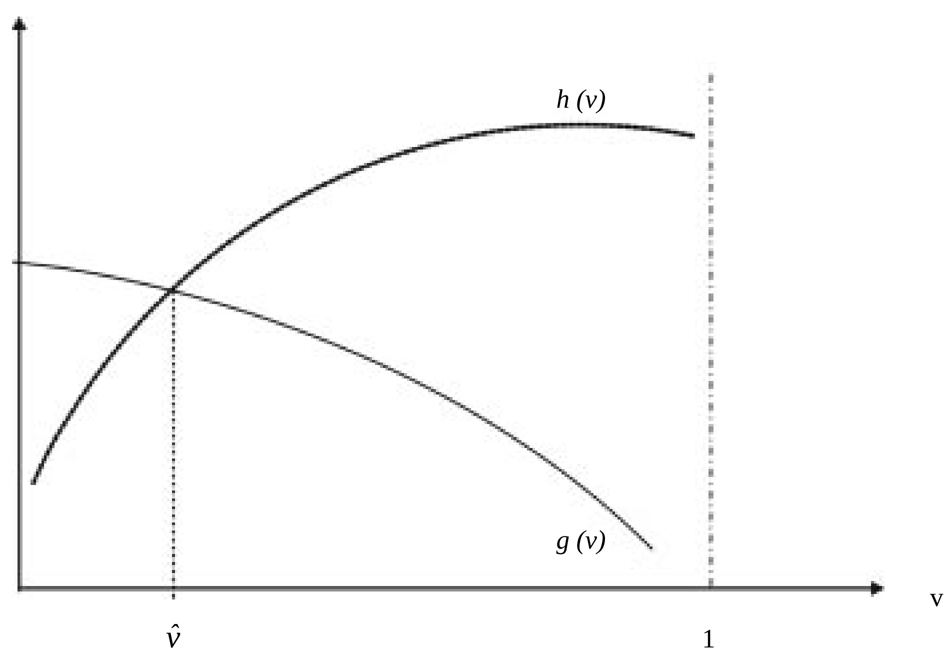


Graphique 3: Unicité de l'équilibre

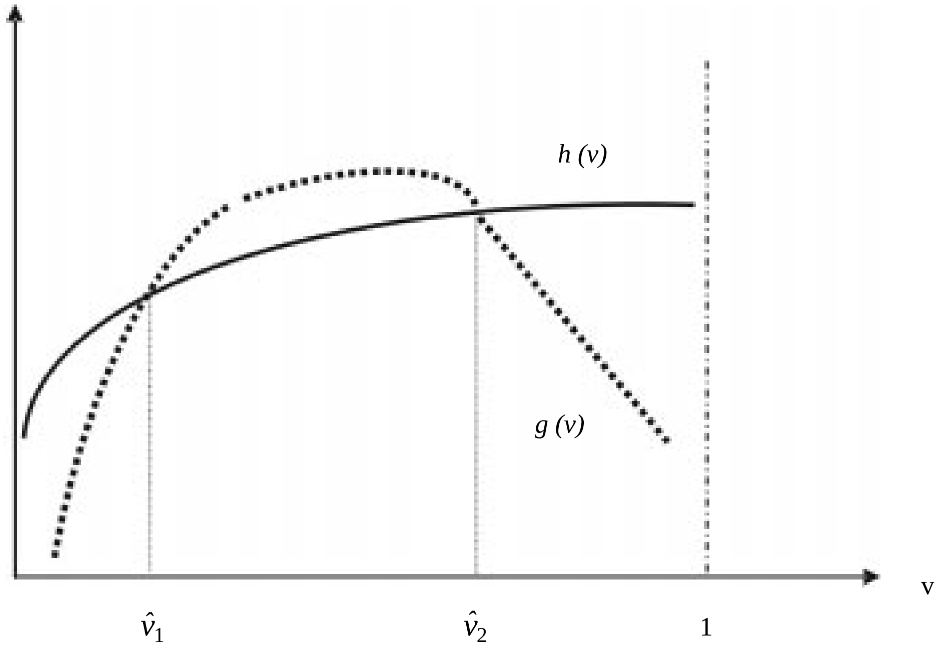


(0,0) est le seul équilibre

Graphique 4: Solutions multiples (cas 1)



Graphique 5: Solutions multiples (cas 2)



Annexe 1. Résolution du programme du consommateur en l'absence d'une contrainte de crédit

Le programme de maximisation de l'agent s'écrit :

$$Max_{s_t,v_t}\left\{\gamma\log((1-v_t)h_{1,t}w_t-s_t)+(1-\gamma)\log(G(v_t)h_{1,t}w_t+Rs_t)\right\},$$

où s_t est l'épargne nette définie à partir de (4).

Sous les conditions de régularité usuelles, le lagrangien est défini par :

$$L(s_t,v_t,\mu_1,\mu_2)=\gamma\log((1-v_t)h_{1,t}w_t-s_t)+(1-\gamma)\log(G(v_t)h_{1,t}w_t+Rs_t)+\mu_1 v_t+\mu_2(1-v_t).$$

Les conditions suffisantes du premier ordre sont :

$$\frac{-\gamma}{(1-v_t)h_{1,t}w_t-s_t}+\frac{(1-\gamma)R}{G(v_t)h_{1,t}w_t+Rs_t} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{-\gamma h_{1,t}w_t}{(1-v_t)h_{1,t}w_t-s_t}+\frac{(1-\gamma)G'(v_t)h_{1,t}w_t}{G(v_t)h_{1,t}w_t+Rs_t}+\mu_1-\mu_2 = 0 \quad (22)$$

$$\mu_1 v_t = 0\ ,\ \mu_1\geqslant 0,\ v_t\geqslant 0 \quad (23)$$

$$\mu_2(1-v_t) = 0\ ,\ \mu_2\geqslant 0,\ 1-v_t\geqslant 0 \quad (24)$$

On distingue 4 cas suivant la stricte positivité ou la nullité des multiplicateurs de Kuhn-Tucker.

Cas 1 : $\mu_1>0$ *et* $\mu_2>0$

Il n'existe pas de solution.

Cas 2 : $\mu_1>0$ *et* $\mu_2=0$

La nullité du multiplicateur μ_2 implique $v_t\leq 1$ et la condition $\mu_1>0$ est équivalente à $v^*=0$. Les conditions du permier ordre se réécrivent :

$$\frac{-\gamma}{h_{1,t}w_t-s_t}+\frac{(1-\gamma)R}{G(0)h_{1,t}w_t+Rs_t} = 0$$

$$\frac{-\gamma h_{1,t}w_t}{h_{1,t}w_t-s_t}+\frac{(1-\gamma)G'(0)h_{1,t}w_t}{G(0)h_{1,t}w_t+Rs_t}+\mu_1 = 0.$$

D'après la première équation, on déduit l'épargne ainsi que la consommation en première et seconde périodes :

$$\begin{aligned} s_t &= \left(1-\gamma(1+\frac{G(0)}{R})\right)h_{1,t}w_t \\ c_t &= \gamma\left(1+\frac{G(0)}{R}\right)h_{1,t}w_t \\ d_{t+1} &= R(1-\gamma)\left(1+\frac{G(0)}{R}\right)h_{1,t}w_t \end{aligned}$$

D'après la seconde équation, on obtient la valeur du multiplicateur μ_1 :

$$\mu_1 = \frac{1-\frac{G'0)}{R}}{1+\frac{G(0)}{R}}.$$

Ce multiplicateur est strictement positif si, et seulement si $1-\frac{G'0)}{R} > 0$, soit $G'(0) < R$.

Cas 3 : $\mu_1 > 0$ *et* $\mu_2 = 0$

La nullité du multiplicateur μ_1 implique $v_t \geqslant 0$ et la condition $\mu_2 > 0$ est équivalente à $v^* = 1$. Les conditions du premier ordre se réécrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{s_t} + \frac{(1-\gamma)R}{G(1)h_{1,t}w_t + Rs_t} &= 0 \\ \frac{\gamma h_{1,t}w_t}{s_t} + \frac{(1-\gamma)R}{G(1)h_{1,t}w_t + Rs_t} - \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

D'après la première équation, on déduit l'épargne ainsi que la consommation en première et seconde périodes :

$$\begin{aligned} s_t &= -\frac{\gamma}{R}G(1)h_{1,t}w_t \\ c_t &= \left(1+\gamma\frac{G(1)}{R}\right)h_{1,t}w_t \\ d_{t+1} &= (1-\gamma)G(1)h_{1,t}w_t. \end{aligned}$$

D'après la seconde équation, on obtient la valeur du multiplicateur μ_2 :

$$\mu_2 = -\frac{R}{G(1)}\left(1 - \frac{G'(1)}{R}\right).$$

Ce multiplicateur est strictement positif si et seulement si $1 - \frac{G'(1)}{R} < 0$, soit $G'(1) > R$.

Cas 4 : $\mu_1 = 0$ *et* $\mu_2 = 0$

Il existe alors une solution optimale intérieure : $v^* = G'^{-1}(R)$.

Les conditions nécessaires du second ordre sont vérifiées en remarquant que la fonction d'utilité est concave et les contraintes sont linéaires. Le lagrangien généralisé est donc concave. Les solutions sont des maximums.

Annexe 2. Résolution du programme du consommateur en présence d'une contrainte de crédit

Le programme de maximisation s'écrit :

$$Max_{v_t} U(w_t(1-v_t)h_{1,t} - s_t, G(v_t)w_t h_{1,t} + Rs_t)$$

s. c.

$$\begin{aligned} s_t &\geqslant w_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t} \\ 0 &\leqslant v_t \leqslant 1. \end{aligned}$$

Sous les conditions de régularité usuelles, le lagrangien généralisé s'écrit :

$$\begin{aligned} L(.) &= \gamma \log(w_t(1-v_t)h_{1,t} - s_t) + (1-\gamma)\log(G(v_t)w_t h_{1,t} + Rs_t) + \\ &\quad \mu_0(s_t - w_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}) + \mu_1 v_t + \mu_2(1-v_t). \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre par rapport à s peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{-\gamma}{(1-v_t)h_{1,t}w_t - s_t} + \frac{(1-\gamma)R}{G(v_t)h_{1,t}w_t + Rs_t} + \mu_0 &= 0 \\ \mu_0\left(s_t - w_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'absence de contraintes de crédit, on a $\mu_0 = 0$, soit $s_t \geqslant w_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}$, soit la condition $s_t R \geqslant Rw_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}$ (1).

Par ailleurs, la première condition se réécrit :

$$Rs_t = w_t h_{1t}\left[(1-\gamma)(1-v_t)R - \gamma G(v_t)\right].$$

Cette solution convient si la condition (1) est vérifiée, soit :

$$(1-\gamma)(1-v_t)R - \gamma G(v_t) \geqslant Rw_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}$$

soit

$$\frac{G(v)}{1-v} \leqslant R\frac{\lambda-\gamma}{\gamma}.$$

Annexe 3. Résolution du programme du consommateur en présence d'une contrainte de crédit

Nous supposons que la contrainte de liquidité est saturée, c.-à-d. que $c_t = \lambda w_t(1-v_t)h_{1,t}$ soit $s_t \equiv \overline{s} = w_t(1-v_t)(1-\lambda)h_{1,t}$.

En particulier, la solution $v^* = 1$ n'est plus optimale.

Le programme de maximisation de l'agent s'écrit :

$$Max_{v_t} U(w_t(1-v_t)h_{1,t} + \overline{s}, G(v_t)w_t h_{1,t} - \overline{s}).$$

Si l'on remplace l'épargne contrainte par son expression et que l'on tient des propriétés de la fonction d'utilité (log-séparable), le programme se réécrit :

$$Max_{v_t} U(1-v_t, G(v_t) - (\lambda-1)R(1-v_t)).$$

La condition du premier ordre est :

$$\frac{-\gamma}{(1-v_t)} + \frac{(1-\gamma)(G'(v_t) + (\lambda-1)R)}{G(v_t) - (\lambda-1)(1-v_t)R} = 0.$$

Il s'ensuit que v^* vérifie la relation suivante :

$$(\lambda-1)(1-v^*)R + (1-\gamma)G'(v^*)(1-v^*) = \gamma G(v^*).$$

Annexe 4. Démonstration de la proposition 2

Pour démontrer la proposition 1, on étudie la condition du premier ordre :

$$(\lambda - 1)(1 - v_t)R + (1 - \gamma)G'(v_t)(1 - v_t) = \gamma G(v_t). \tag{25}$$

On pose $\Psi_1(v_t) = (\lambda - 1)(1 - v_t)R + (1 - \gamma)G'(v_t)(1 - v_t)$ et $\Psi_2(v_t) = \gamma G(v_t)$.

D'après l'hypothèse 1, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Psi_2' &> 0 \text{ et } \Psi_2'' < 0 \\ \Psi_2(0) &= \gamma G(0) \\ \Psi_2(1) &= \gamma G(1). \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée première de Ψ_1 implique : $\Psi_1'(v_t) = -(\lambda - 1)R - (1 - \gamma)G'(v_t) + G''(v_t)(1 - v_t) < 0$.

La dérivée seconde dépend des hypothèses sur la dérivée troisième de la fonction G. Par ailleurs, on a : $\Psi_1(0) = (\lambda - 1)R + (1 - \gamma)G'(0)$ et $\Psi_1(1) = 0$.

La fonction Ψ_1(respectivement Ψ_2) est décroissante (respectivement croissante), il existe une solution intérieure strictement positive si et seulement si $\Psi_1(0) > \Psi_2(0)$ et $\Psi_1(1) < \Psi_2(1)$. Cette dernière condition est toujours vérifiée puisque $\Psi_2(1) = \gamma G(1) > 0$. La condition nécessaire et suffisante s'écrit donc $(\lambda - 1)R + (1 - \gamma)G'(0) > \gamma G(0)$, soit :

$$\lambda > 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1 - \gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right) \tag{26}$$

Annexe 5. Démonstration de la proposition 3

Il convient alors de remarquer que si $\lambda \to 1$, il existe une solution intérieure strictement positive si et seulement si $(1-\gamma)G'(0) > \gamma G(0)$, soit $\frac{G'(0)}{G(0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$.

Si $1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)} < 0$, soit $\frac{G'(0)}{G(0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, la condition (26) implique $\lambda < 1$. Or $\lambda \geqslant 1$, il existe donc une solution optimale, $v^* > 0$. Inversement, si $1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)} \geqslant 0$, soit $\frac{G'(0)}{G(0)} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}$, il existe $\underline{\lambda}= 1 + \frac{\gamma G(0)}{R}\left(1 - \frac{(1-\gamma)G'(0)}{\gamma G(0)}\right)$ tel que pour $1 \leq \lambda \leq \underline{\lambda}$, le temps consacré à l'éducation est nul. Si $\lambda > \underline{\lambda}$, la condion (26) est toujours vérifiée et il existe une solution optimale $v^* > 0$.

Annexe 6. Statique comparative

Par différentiation de l'équation (20), on montre que :

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\lambda} &= \frac{R(1-v)}{(\lambda-1)R - (1-\gamma)G''(v) + G'(v)} > 0 \\
\frac{dv}{dR} &= \frac{(\lambda-1)(1-v)}{(\lambda-1)R - (1-\gamma)G''(v) + G'(v)} > 0 \\
\frac{dv}{d\gamma} &= -\frac{G(v) + G'(v)(1-v)}{(\lambda-1)R - (1-\gamma)G''(v) + G'(v)} < 0.
\end{aligned}$$

Annexe 7. Résolution du programme en présence d'externalités avec un marché du crédit parfait

Le programme de l'agent s'écrit :

$$Max_{v_t}\{1 - v_t + G(\overline{v}_t, v_t)/R\}.$$

Le lagrangien généralisé est :

$$L(v_t, \mu_1, \mu_2) = 1 - v_t + G(\overline{v}_t, v_t)/R + \mu_1 v + \mu_2(1 - v).$$

Les conditions suffisantes du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{aligned} -1 + G_2'(\overline{v}_t, v_t)/R + \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 v_t &= 0, \mu_1 \geqslant 0, v_t \geqslant 0 \\ \mu_2(1 - v_t) &= 0, \mu_2 \geqslant 0, 1 - v_t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cas 1 : $\mu_1 > 0$ *et* $\mu_2 > 0$

Il n'existe pas de solution.

Cas 2 : $\mu_1 > 0$ *et* $\mu_2 = 0$

La nullité du multiplicateur μ_2 implique $v_t \leq 1$ et la condition $\mu_1 > 0$ est équivalente à $\widehat{v} = 0$. La condition de positivité de μ_1 impose :

$$G_2'(\overline{v}_t, 0) < R.$$

D'après l'hypothèse 3, on en déduit que (0,0) est un équilibre.

Cas 3 : $\mu_1 = 0$ *et* $\mu_2 > 0$

La nullité du multiplicateur μ_1 implique $v_t \geqslant 0$ et la condition $\mu_2 > 0$ équivaut à $\widehat{v} = 1$. La condition de positivité de μ_2 impose :

$$G_2'(\overline{v}_t, 1) > R.$$

D'après l'hypothèse 3, on en déduit que (1,1) est un équilibre.

Cas 4 : $\mu_1 = 0$ *et* $\mu_2 = 0$

La condition suffisante du premier ordre s'écrit $G_2'(\overline{v}_t, \widehat{v}) = R$.

Pour déterminer le(s) point(s) fixe(s), on pose $f(\widehat{v}) = G_2'(\widehat{v}, \widehat{v}) - R$ avec $\widehat{v} = \overline{v}$. On a donc $f'(\widehat{v}) = G_{21}''(\widehat{v}, \widehat{v}) + G_{22}''(\widehat{v}, \widehat{v})$. Si $f'(\widehat{v}) > 0 \; \forall \widehat{v}$, f est croissante. D'après l'hypothèse 3, $f(0) = G_2'(0, 0) - R < 0$ et $f(1) = G_2'(1, 1) - R > 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit qu'il existe un unique équilibre. En imposant des conditions sur les dérivées partielles de la fonction G, il est possible de montrer qu'il existe des équilibres multiples.

Annexe 8. démonstration de la proposition 5

On pose $f(\widehat{v}) = g(\widehat{v}) - h(\widehat{v})$ avec $g(\widehat{v}) = (\lambda - 1)R(1 - \widehat{v}) + (1 - \gamma)G_2'(\widehat{v}, \widehat{v})(1 - \widehat{v})$ et $h(\widehat{v}) = \gamma G(\widehat{v}, \widehat{v})$. Pour déterminer le(s) point(s) fixe(s), il faut étudier les propriétés des deux fonctions g et h. Les valeurs aux bornes sont données par : $g(0) = (\lambda - 1)R + (1 - \gamma)G_2'(0, 0)$ et $g(1) = 0$.

Le calcul de la dérivée de g est : $g'(\widehat{v}) = -(\lambda-1)R-(1-\gamma)G_2'(\widehat{v}, \widehat{v})+(1-\gamma)(1-\widehat{v})\left[G_{21}''(\widehat{v}, \widehat{v}) + G_{22}''(\widehat{v}, \widehat{v})\right]$. Le signe de cette expression est à priori indéterminé.

En particulier, $g'(0) = -(\lambda-1)R + (1-\gamma)\left[G_{21}''(0,0) + G_{22}''(0,0) - G_2'(0,0)\right]$ et $g'(1) = -(\lambda - 1)R - (1 - \gamma)G_2'(1, 1) < 0$.

Pour la fonction h, on obtient $h(0) = \gamma G(0, 0), h(1) = \gamma G(1, 1)$ et $h'(v) = \gamma(G_1'(\widehat{v}, \widehat{v}) + G_2'(\widehat{v}, \widehat{v})) > 0$. La fonction h est donc croissante.

Comme précédemment, $h(1) > g(1)$, soit $f(1) < 0$, il existe donc au moins un équilibre $(\widehat{v}, \widehat{v})$ tel que $\widehat{v} > 0$ si et seulement si $f(0) > 0$, soit $(\lambda - 1)R + (1 - \gamma)G_2'(0, 0) > \gamma G(0, 0)$, c.-à-d. que $\lambda > 1 + \frac{\gamma G(0,0)}{R}(1 - \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{G_2'(0,0)}{G(0,0)})$.
En particulier, si $\frac{G_2'(0,0)}{G(0,0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, on obtient un équilibre $(\widehat{v}, \widehat{v})$ avec $\widehat{v} > 0$. En revanche, si $\frac{G_2'(0,0)}{G(0,0)} > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, il existe une valeur critique $\underline{\lambda}$ tel que $\forall 1 \leq \lambda \leq \underline{\lambda}$, le seul équilibre est (0,0) et $\forall\ \lambda > \underline{\lambda}$, on obtient un équilibre $(\widehat{v}, \widehat{v})$ avec $\widehat{v} > 0$.

Si $h(1) < g(1)$, la fonction f doit être non monotone et il faut donc imposer des conditions aux dérivées partielles secondes et troisièmes de la fonction G.

Enfin, $(0, 0)$ est toujours un équilibre. Si peu d'agents décident de consacrer du temps à la formation, le rendement marginal du capital est toujours faible et les agents seront donc peu incités à investir en éducation.

Documents de travail de la Banque du Canada
Bank of Canada Working Papers

***Les documents de travail sont publiés généralement dans la langue utilisée par les auteurs; ils sont cependant précédés d'un résumé bilingue*. Working papers are generally published in the language of the author, with an abstract in both official languages.**

2004

2004-12	Durées d'utilisation des facteurs et fonction de production : une estimation par la méthode des moments généralisés en système	E. Heyer, F. Pelgrin et A. Sylvain
2004-11	Estimating New Keynesian Phillips Curves Using Exact Methods	L. Khalaf et M. Kichian
2004-10	Public Venture Capital and Entrepreneurship	O. Secrieru et M. Vigneault
2004-9	Estimating Policy-Neutral Interest Rates for Canada Using a Dynamic Stochastic General-Equilibrium Framework	J.-P. Lam et G. Tkacz
2004-8	The Economic Theory of Retail Pricing: A Survey	O. Secrieru
2004-7	The Demand for Money in a Stochastic Environment	J. Atta-Mensah
2004-6	Bank Capital, Agency Costs, and Monetary Policy	C. Meh et K. Moran
2004-5	Structural Change and Forecasting Long-Run Energy Prices	J.-T. Bernard, L. Khalaf, et M. Kichian
2004-4	A Structural Small Open-Economy Model for Canada	S. Murchison, A. Rennison, et Z. Zhu
2004-3	Modélisation << PAC >> du secteur extérieur de l'économie américaine	M.-A. Gosselin et R. Lalonde
2004-2	Exact Tests of Equal Forecast Accuracy with an Application to the Term Structure of Interest Rates	R. Luger
2004-1	The Effect of Adjustment Costs and Organizational Change on Productivity in Canada: Evidence from Aggregate Data	D. Leung

2003

2003-44	Common Trends and Common Cycles in Canadian Sectoral Output	F. Barillas et C. Schleicher
2003-43	Why Does Private Consumption Rise After a Government Spending Shock?	H. Bouakez et N. Rebei
2003-42	A Structural VAR Approach to the Intertemporal Model of the Current Account	T. Kano

Pour obtenir des exemplaires et une liste complète des documents de travail, prière de s'adresser à :
Copies and a complete list of working papers are available from:

Diffusion des publications, Banque du Canada
234, rue Wellington, Ottawa (Ontario) K1A 0G9
Adresse électronique : publications@banqueducanada.ca
Site Web : http://www.banqueducanada.ca

Publications Distribution, Bank of Canada
234 Wellington Street, Ottawa, Ontario K1A 0G9
E-mail: publications@bankofcanada.ca
Web site: http://www.bankofcanada.ca